Robert Müller
Bundesrealgymnasium Wien 3

$$(x+b+(4b^2-y^2)-\sqrt{4b^2-y^2}^{\,2}).((x-y+b).(-x-y-b)+(b^2-x^2)-\sqrt{b^2-x^2}^{\,2})=0\ \&$$
$$((x+b).(x-b)+(2b-y).(b+y)-\sqrt{(2b-y).(b+y)}^{\,2}).(x^2+\sqrt{-y-b}^{\,4}-b^2)=0\ \&$$
$$(x+b+(4b^2-y^2)-\sqrt{4b^2-y^2}^{\,2}).((y-2b).y+(-x^2-bx)-\sqrt{-x^2-bx}^{\,2}).(y+2x+$$
$$+(bx-x^2)-\sqrt{bx-x^2}^{\,2}).(\sqrt{x}^{\,4}+(y-b)^2-b^2)=0\ \&$$
$$(y+4x+2b+(-x^2-bx)-\sqrt{-x^2-bx}^{\,2}).(y-4x+2b+(bx-x^2)-\sqrt{bx-x^2}^{\,2})=0\ \&$$
$$(x+b+(4b^2-y^2)-\sqrt{4b^2-y^2}^{\,2}).((y-2b).y.(y+2b)+(b^2-x^2)-\sqrt{b^2-x^2}^{\,2})=0\ \&$$
$$((x+b).(x-b)+(4b^2-y^2)-\sqrt{4b^2-y^2}^{\,2}).(y+2x+(b^2-x^2)-\sqrt{b^2-x^2}^{\,2})=0\ \&$$
$$(x+b+(4b^2-y^2)-\sqrt{4b^2-y^2}^{\,2}).(\sqrt{x+b}^{\,4}+y^2-4b^2)=0\ \&\ (x+(4b^2-y^2)+\sqrt{4b^2-y^2}^{\,2})=0\ \&$$
$$(x^2+\sqrt{y-b}^{\,4}-b^2).(\sqrt{-x}^{\,4}+\sqrt{b-y}^{\,4}-b^2).(\sqrt{x}^{\,4}+(y+b)^2-b^2).(\sqrt{-x}^{\,4}+\sqrt{-y-b}^{\,4}-b^2)=0\ \&$$
$$(x+b+(4b^2-y^2)-\sqrt{4b^2-y^2}^{\,2}).((x-y+b).(-x-y-b)+(b^2-x^2)-\sqrt{b^2-x^2}^{\,2})=0\ \&$$
$$((x+b).(x-b)+(2b-y).(b+y)-\sqrt{(2b-y).(b+y)}^{\,2}).(x^2+\sqrt{-y-b}^{\,4}-b^2)=0\ \&$$
$$(x^2+\sqrt{y-b}^{\,4}-b^2).(\sqrt{-x}^{\,4}+\sqrt{b-y}^{\,4}-b^2).(\sqrt{x}^{\,4}+(y+b)^2-b^2).(\sqrt{-x}^{\,4}+\sqrt{-y-b}^{\,4}-b^2)=0\ \&$$
$$(x^2+\sqrt{y-b}^{\,4}-b^2).(\sqrt{-x}^{\,4}+\sqrt{b-y}^{\,4}-b^2).(\sqrt{x}^{\,4}+(y+b)^2-b^2).(\sqrt{-x}^{\,4}+\sqrt{-y-b}^{\,4}-b^2)=0\ \&$$
$$(x+(4b^2-y^2)+\sqrt{4b^2-y^2}^{\,2})=0\ \&$$
$$((x+b).(x-b)+(b^2-y^2)-\sqrt{b^2-y^2}^{\,2}).(x^2+\sqrt{y-b}^{\,4}-b^2).(x^2+\sqrt{-y-b}^{\,4}-b^2)=0\ \&$$
$$((x+b).(x-b)+(4b^2-y^2)-\sqrt{4b^2-y^2}^{\,2}).(y+2x+(b^2-x^2)-\sqrt{b^2-x^2}^{\,2})=0$$

- EINMAL ANDERS !

Kurvendiskussionen sind zu einer lieben Gewohnheit im Mathematikunterricht geworden. Verleitet nicht jedoch eben diese Gewohnheit zu einer unreflektierten Tradierung ihrer selbst? Haben sich nicht vielenorts Kurvendiskussionen auf 'algorithmische Tätigkeiten' reduziert, die der Computer viel schneller erledigen könnte ? Hat nicht solcherart eine Sinnentfremdung hin zu einem - gemäß FREUDENTHAL - 'beziehungslosen' Mathematikunterricht stattgefunden ?

Ziel des Vortrages ist es daher, eine Rückbesinnung auf den Zweck von Kurvendiskussionen anzuregen und an konkreten Beispielen aufzuzeigen, wie eine solche Rückbesinnung im Mathematikunterricht verwirklicht werden könnte, - und zwar ohne Ausweitung des Lehrstoffes ! Als praktizierender Lehrer weiß man schließlich sehr gut, daß das Heil - sprich die Verbesserung des Mathematikunterrichtes - nicht in der Ausweitung des Lehrstoffes liegen kann, sondern vielmehr in einer Veränderung der didaktischen Sichtweise und in einer daraus resultierenden Neugewichtung von Unterrichtsinhalten bestehen muß, ohne deswegen gleich das Kind mit dem Bade auszuschütten. Insofern ist der Titel "Kurvendiskussion einmal anders" in zweierlei Hinsicht zu verstehen:

In naher Zukunft zunächst wohl so, daß wenigstens e i n m a l die eine oder die andere der hier vorgestellten Ideen in den Mathematikunterricht einfließt.

In ferner(?) Zukunft e i n m a l wohl so, daß die <u>Sinn- und Zweckfrage</u>, die <u>Stärkung des heuristischen Denkens</u> und die <u>lebensnahen Anwendungen</u> in den Mittelpunkt des Interesses rücken.

Kristallisationspunkt aller Überlegungen hier ist die These, daß (mathematische) Funktionen eine spezielle Form der Nachrichtenverschlüsselung sind, und vice versa Kurvendiskussionen der Entschlüsselung eben dieser Nachrichten dienen !

FUNKTIONEN ALS VERSCHLÜSSELUNG VON NACHRICHTEN

Funktionen sind beileibe keine "Erfindung" der Mathematik. Die Natur - und wir als einer ihrer Teile - bedienen uns der Funktionen als Voraussetzung für "logisches Denken" seit langem: Paare von Phänomenen treten gemeinsam auf und werden

* als Teile eines zusammengehörigen Ganzen (simultane Koinzidenz = statischer Funktionsbegriff im Sinne einer Teilmenge des kartesischen Produktes)
* als Ursachen-Wirkungs-Kette (sukzedane Koinzidenz = dynamischer Funktionsbegriff im Sinne einer (eventuell stochastisch bedingten) Determiniertheit)

eher unbewußt verarbeitet und 'erlebt'. Insoferne besteht keine Veranlassung eine Definition des Funktionsbegriffes im Mathematikunterricht an den Anfang zu stellen. Vielmehr scheint es zunächst angebracht zu sein, Funktionen als spezielle Verschlüsselungen (von simultanen bzw. sukzedanen Koinzidenzen) b e w u ß t zu machen und solchermaßen psychologisch abzusichern ! Besondere Beachtung sollte dabei der schrittweisen Bewegung von der verbalen hin zur formalen Beschreibung - wie sie etwa die nachfolgende Tabelle zum Thema "Anhalteweg" widerspiegelt - zuteil werden.

Vorwissen, Sprache (gemeinsames Alphabet) S C H L Ü S S E L	Nachricht D A T E N	Beispiel
Umgangssprache	Verbale Beschreibung	Der Anhalteweg wächst mit zunehmender Geschwindigkeit
+ Zahlen	Zahlen(paare), Urliste	v 50 100 .. km/h s 40 130 .. m
+ EDA	spezielle Darstellungsformen, 'Visualisierungen'	
+ Repertoire an 'Standardfunktionen'	Eine spezielle, passende Funktion, bzw. deren Kenngrößen.	$s(v)=(\frac{v}{10})^2+\frac{3v}{10}$

So könnte man anhand der obigen Tabelle aufzeigen,

- daß die Komplexitätssteigerung hinsichtlich der verfügbaren Sprache eine Komplexitätsminderung im Aufbau der Nachricht erlaubt,
- daß Hand in Hand mit dieser eine 'Datenbereinigung' einhergeht, die weg von den speziellen Paaren hin zu einer allgemeinen (statistisch gesicherten) Gesetzmäßigkeit führt,
- daß Hand in Hand mit dieser Interpolations- und Extrapolationsprozesse ins Spiel kommen (müssen), die in letzter Konsequenz in den Übergang vom Diskreten zum Kontinuierlichen münden.

Weiters kann man der Tabelle entnehmen, daß in jeder Phase der Verschlüsselung sowohl die statische als auch die dynamische Interpretation der Funktionalität möglich ist. Angesichts der Erfahrungen der Mathematikdidaktik mit 'new math' aber auch mit jener Situation, aus der heraus sich diese erst entwickelt hatte, sollte klar sein, daß die doppelte Interpretationsmöglichkeit kein Luxus ist - die Natur leistet sich keinen

Luxus ! - , kein Freibrief, ausschließlich den einen oder den anderen (gerade modernen ?) Standpunkt verfechten zu dürfen. Die doppelte Interpretationsfähigkeit ist dem Funktionsbegriff immanent, und betont - wie etwa die folgenden Definitionen eines Kreises aufzeigen sollen - verschiedene Facetten ein und desselben Phänomens !

lokal-dynamisch .... global-statisch

$y' = -\frac{x}{y}$; $y(1)=0$ $\quad$ $x=\cos t$, $y=\sin t$ $\quad t \in [0,2\pi]$ $\quad \{X \mid \overline{XM} = 1\}$

KURVENDISKUSSION ALS ENTSCHLÜSSELUNG VON NACHRICHTEN

Wenn auch die Methoden zur Entschlüsselung einer Nachricht von denen zu ihrer Verschlüsselung durchaus verschieden sein können, so wird im Normalfall die Aufgabe doch wohl darin bestehen den Verschlüsselungsvorgang rückgängig zu machen, also von der formalen Ebene zur verbalen 'hinunterzusteigen'. Hat man im Zuge des Verschlüsselns bewußt Daten 'bereinigt' und ihrer konkreten Bedeutung entkleidet, so hat man nun im Gegenzug bewußt derartige Idealisierungen zu problematisieren und ihnen Leben in Form konkreter Bedeutsamkeit einzuhauchen. Demgemäß sollte das Entschlüsseln auf drei Ebenen erfolgen:

* Syntaktische Übersetzungsebene
* Semantische Interpretationsebene
* Pragmatische Be- und Verwertungsebene.

Im Schulalltag sind wir m.E. jedoch weit davon entfernt, all diesen Ebenen gerecht zu werden. Daß die Ursachen hiefür jedoch nicht unbedingt im Wesen der Mathematik zu suchen und solchermaßen fachspezifisch irreparabel sind, mögen die folgenden Beispiele zeigen:

a) SYNTAKTISCHES ENTSCHLÜSSELN

Im Mittelpunkt steht die Rückkehr von der formalen Ebene zur visuellen, zu Wertetabellen und zu verbalen Beschreibungen:

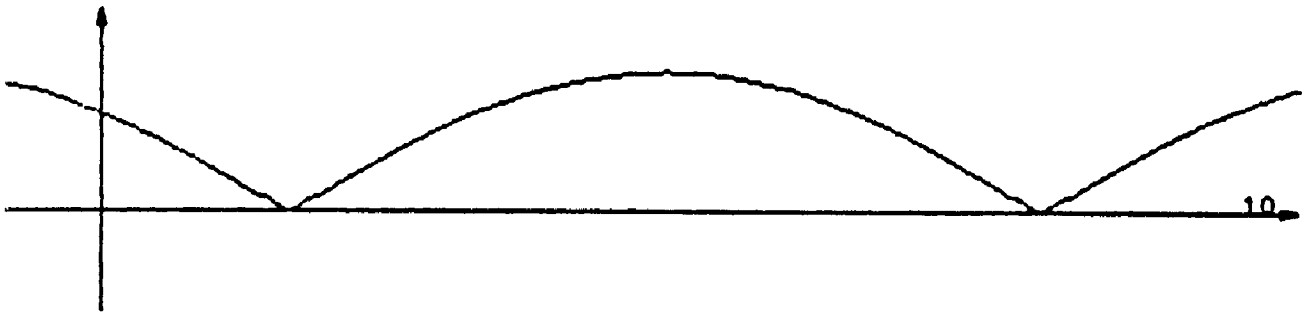
lokal .... global

Rekonstruktion(sversuch) der Urliste = Suchen einzelner (wichtiger ?) Punkte	modulare Rekonstruktion vermittels Grundrepertoire an Funktionen durch schrittweise Transformation

Auf der syntaktischen Ebene ist der Mathematikunterricht zu Hause, - wenn auch zumeist nur in der eingespielten Form des Nullstellen-Extremwert-Wendepunkt-Schemas, das lokale (z.B. Extremata) als auch globale (Drehorientierung von Kurvenstücken) Gesichtspunkte vereinigt. Wie das folgende einfache Beispiel jedoch zeigt, ist diese Vorgangsweise oftmals nicht besonders einfach und schon gar nicht immer zielführend:

Beispiel 1: Diskutiere $y = \sqrt{1 - \sin x}$ über RxR.

a) Lokale Diskussion: Die Rückkehr zur Urliste läßt sich durch computerunterstützte Punktgrafik leicht bewerkstelligen.

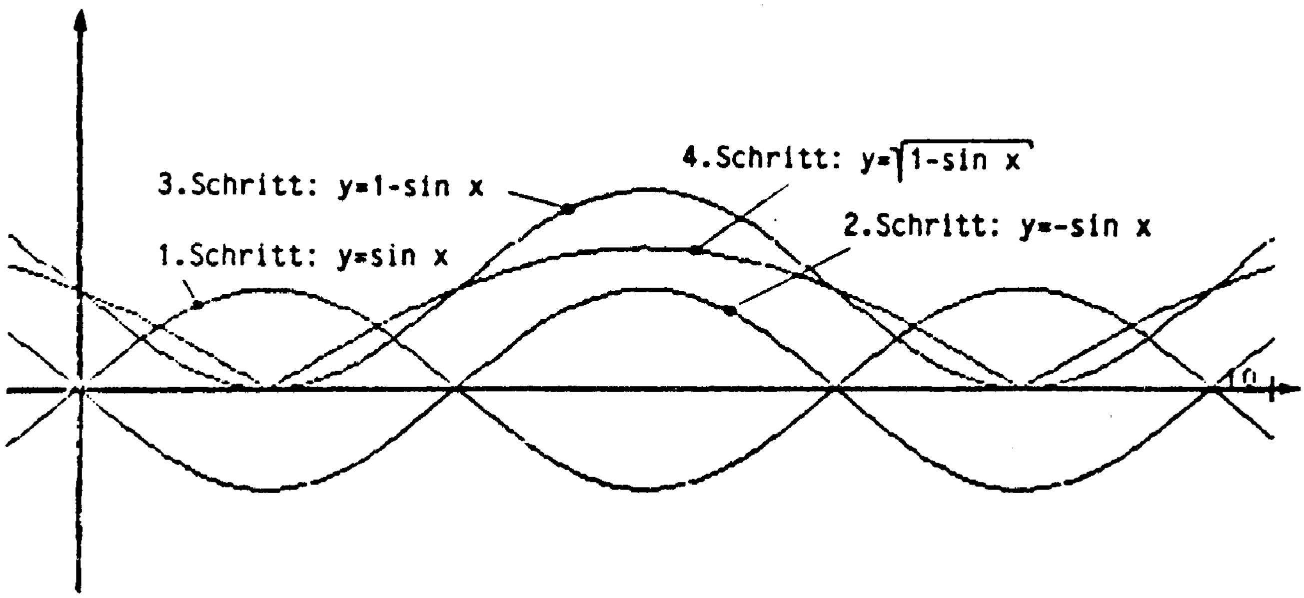


b) Die übliche Kurvendiskussion macht - abgesehen von den Nullstellen - wegen des Auftretens der unbestimmten Ausdrücke

$$y' = \frac{-\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}} = 0 \quad \text{und} \quad y'' = -\frac{1}{4} \cdot \frac{(1-\sin x)^2}{(1-\sin x)^{3/2}} = 0$$

(bei denen auch die Regel von l'HOSPITAL versagt) doch einige Probleme.

c) Globale Diskussion: Die Grundidee ist die moduläre Rekonstruktion, also die "Analyse durch schrittweise Synthese".



Aus diesem und ähnlichen Beispielen (wie etwa $y = (1+\cos x)^2$ oder $y = \tan x - \sin x^2$) erkennt man, daß das Nullstellen-Extremwert-Wendepunkt-Schema weder besonders effizient noch immer zielführend ist, wie man aus seiner Dominanz im Mathematikunterricht vermuten könnte. Wünschenswert scheint es daher zu sein Kurvendiskussionen auf ein breiteres methodisches Fundament zu stellen. Wir kommen im letzten Abschnitt dieses Referates darauf zurück.

b) SYNTAKTISCHES UND SEMANTISCHES ENTSCHLÜSSELN

Grundsätzlich sind zwei Wege zur Einbeziehung der Semantik möglich. Zum einen, indem man von vornherein von eingekleideten Kurvendiskussionsbeispielen ausgeht, was leider viel zu selten geschieht. Im Abschnitt c) werden hiezu zwei Beispiele vorgestellt werden. Zum anderen, indem man im nachhinein für das mathematische Funktionsmodell Interpretationen (= Anwendungen) sucht. Ein hervorragendes Paradigma hiefür ist die Diskussion einer Hyperbel in dem L1 entnommenen *)

Beispiel 2: "Linsengleichung"

Anwendung einer Kurvendiskussion auf Optik, Elektrizitätslehre und Astronautik

Wir betrachten die Funktion $y = \frac{cx}{x-c}$ im Bereich $\mathfrak{D} = \{0 \leq x < \infty\}$, $c > 0$, Abb. 105.

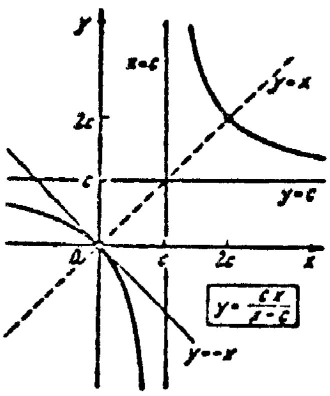


Abb. 105

Es ist $y' = \frac{-c^2}{(c-x)^2}$ und $y'(0) = -1$. Wir stellen fest:

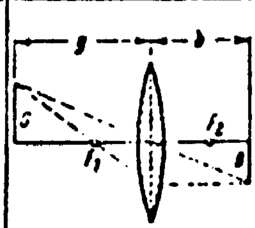
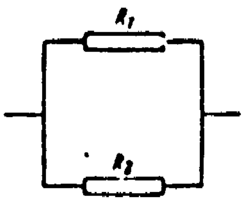
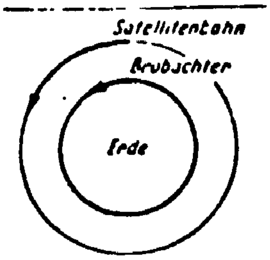
1. Nullstelle für $x = 0$, Tangente an der Nullstelle: $y = -x$. In der Nähe des Nullpunktes gilt daher $y \approx -x$.
2. Einfacher Pol für $x = c$. Die Gerade $x = c$ ist Asymptote.
3. $x > c \Rightarrow y > 0$; $x < c \Rightarrow y < 0$.
4. $y = \frac{c}{1 - \frac{c}{x}}$, für große x strebt y gegen c. $y = c$ ist horizontale Asymptote.
5. Da $y' < 0$ für $x \neq c$, ist die Funktion stets abnehmend. Es gibt keinen Extremwert.
6. Schnittpunkt mit $y = x$ ergibt $x = y = 2c$.

Man führt die Diskussion dieser gebrochenen rationalen Funktion in der Mathematik durch, ohne danach zu fragen, welche praktische Bedeutung man der Konstanten c und den Variablen x, y geben kann. Wir wollen bei dieser Funktion einmal sehen, in welchen Gebieten sie auftritt und was unsere Ergebnisse jeweils besagen.

Wir wählen drei Beispiele aus Optik, Elektrizitätslehre und Astronautik.

In der ersten Spalte der folgenden Tabelle steht das mathematische Symbol bzw. der Ausdruck, in den übrigen Spalten seine Interpretation in der jeweiligen Anwendung.

*) L1 : Keil-Kratz-Wörle / "Infinitesimalrechnung / Bayerischer Schulbuchverl. 1968

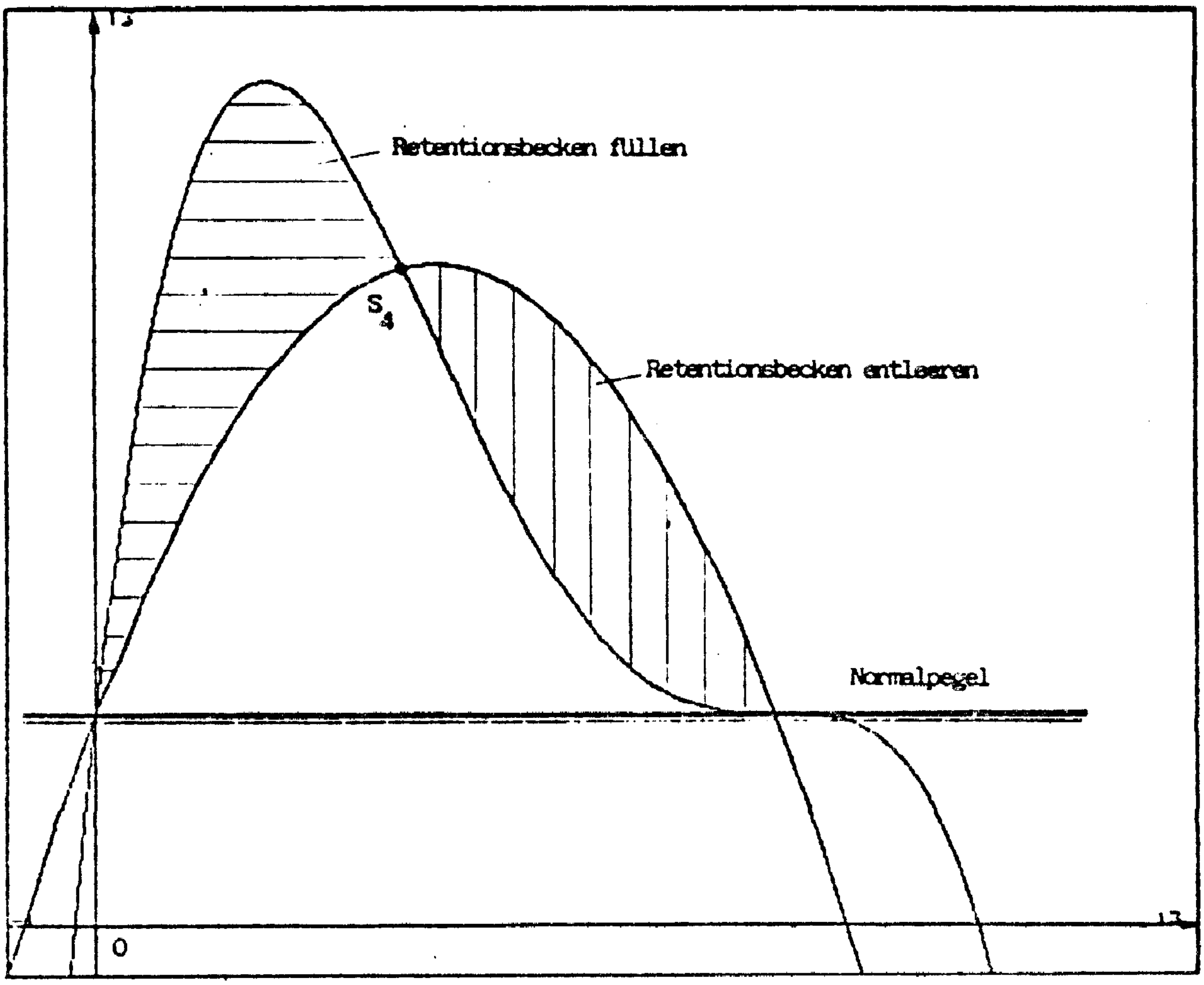
Mathematisches Symbol	Bedeutung beim Beispiel aus der Optik	Elektrizität	Astronautik
c	Brennweite f einer Sammellinse.	Gesamtwiderstand R einer Parallelschaltung	Rotationszeit e der Erde $\approx$ 1 Tg.
x	Gegenstandsweite g	Ein Teilwiderstand R_1	Umlaufszeit s eines Satelliten auf einer Äquatorbahn
y	Bildweite b	Der andere Teilwiderstand R_2	Zeit t zwischen zwei Meridiandurchgängen an einem Ort der Erde
$y = \frac{cx}{x-c}$	$b = \frac{fg}{g-f}$	$R_2 = \frac{R \cdot R_1}{R_1 - R}$	$t = \frac{es}{s-e}$
$x \to \infty \Rightarrow y \to c$ nach (4)	Gegenstand in großer Entfernung, Bild fast in Brennebene	R_1 nahezu ein Isolator $R \approx R_2$	Bei langer Umlaufszeit bewegt sich der Satellit gegenüber den Fixsternen sehr langsam. Er kommt ungefähr nach 1 Tag wieder in Sicht (etwa unser Mond!)
x wird kleiner $\Rightarrow y$ nimmt zu (5)	Gegenstand rückt näher, Bild entfernt sich von der Linse	Je mehr R_1 abnimmt, desto größer wird R_2	Bei kürzerer Umlaufszeit verspätet sich der Satellit täglich mehr
$x = y$ $\Rightarrow x = y = 2c$ (6)	Bild und Gegenstand in gleicher Entfernung $2f$	$R_1 = R_2 = 2R$ oder $R = \frac{R_1}{2} = \frac{R_2}{2}$	Wenn die Umlaufszeit 2 Tage beträgt, holen wir den Satelliten auch alle 2 Tage ein. Er ist 24 Stunden über und 24 Stunden unter dem Horizont (noch nicht realisiert)
$x \to c \Rightarrow \|y\| \to \infty$ Pol (2)	Gegenstand in der Brennebene, Bild rückt ins Unendliche	Wenn $R_1 = R$, muß R_2 ein Isolator sein	24-Stunden-Bahn. $t \to \infty$ Der Satellit steht über einem Ort der Erde still (Syncom-Satellit der USA)
$x < c \Rightarrow y$ negativ (3)	Gegenstand zwischen Brennebene und Linse, b negativ, virtuelles Bild	$R_1 < R$, R_2 negativ physikalisch sinnlos	Umlaufszeit $s < 1$ Tag, t negativ, d. h. der Satellit bewegt sich nicht mehr von Ost nach West, sondern umgekehrt. Er geht im Westen auf (Echo I)
$x \to 0 \Rightarrow y \approx -x$ (1)	Gegenstand und virtuelles Bild etwa gleich weit von der Linse entfernt, wenn Gegenstand sehr nahe an der Linse		Schneller, d. h. tieffliegender Satellit. Umlaufszeit unterscheidet sich kaum von der Zeit zwischen zwei Durchgängen (z. B. bemannte Satelliten, Merkury, Wostok und Gemini)
			

c) SYNTAKTISCHES UND SEMANTISCHES UND PRAGMATISCHES ENTSCHLÜSSELN

Den Einkleidungen in Beispiel 2 fehlte ein wesentliches Element unseres Erziehungsauftrages. Es ist dies die 'Pragmatische Dimension', das 'Persönlich-Betroffensein', der Aspekt einer 'Politischen Bildung'. Nur dort, wo wir durch ernsthafte (auch mathematische !) Überlegungen Stellung beziehen und Entscheidungen treffen müssen, etwa ob Auwälder oder etwa die Steuerprogression wirklich notwendig sind und was ihr Vorhandensein jeweils 'bewirkt', kann 'Betroffenheit' entstehen:

Beispiel 3: "Tausendjähriges Hochwasser"

Bei guter Wasserführung transportiert die Donau 300 Mill. m³ Wasser pro Tag. Bei einem tausendjährigen Hochwasser wird dieser 'Pegel' für die Dauer von 8 Tagen überschritten. Am Beginn tritt eine 'Stoßwelle' auf, die am Ende des zweiten Tages mit einer Durchflußmenge von rund 13 000 m³ pro Sekunde ihren Spitzenwert erreicht; in den folgenden sechs Tagen normalisiert sich – zuerst schnell, dann eher langsam und unmerklich – der Wasserstand auf seinen ursprünglichen Wert.



Die obige Angabe ist offenbar die Einkleidung einer sg. 'Umkehraufgabe' zur Kurvendiskussion. Approximiert man die Abhängigkeit der Wasserführung vom Beobachtungszeitpunkt durch ein Polynom 4. Grades, so erhält man mittels eines unbestimmten Ansatzes (x ... Zeit in Tagen, y ... Wassermassen in 100 Mill. m^3):

$$y = -\frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4.x^2 + \frac{32}{3}x + 3$$

Als Anwendung der Integralrechnung berechnet man, wieviel Wasser zusätzlich herangeführt wird; man erhält 3,4 Mrd. m^3.

Aufbauend auf dieses Wissen wird man Schutzmaßnahmen zu treffen suchen. Hochwasserschutz besteht unter anderem darin, die 'Stoßwelle' zu 'kappen', indem am Beginn des Hochwassers Wassermassen in Retentionsbecken (z.B. Auwäldern) zurückgehalten werden. Wie groß müssen die Retentionsbecken sein, wenn die Wasserführung einer Parabel 2. Grades unter Beibehaltung der Hochwasserdauer folgen soll ?

Wiederum erhält man über einen unbestimmten Ansatz

$$y = -0,4.x^2 + 3,2.x + 3$$

Von den vier Schnittpunkten der beiden Polynome sind zwei trivial und einer unzulässig. Der vierte Schnittpunkt S_4 (3,6|9,3) gibt an, wann der Zufluß zu den Retentionsbecken endet (und der Ablauf aus diesen beginnt). Der - wegen der Deutung als Zu- und Ablauf trivialerweise o r i e n t i e r t e - Flächeninhalt zwischen den beiden Kurven liefert die Menge des zurückzuhaltenden Wassers zu rund 1,09 Mrd. m^3.

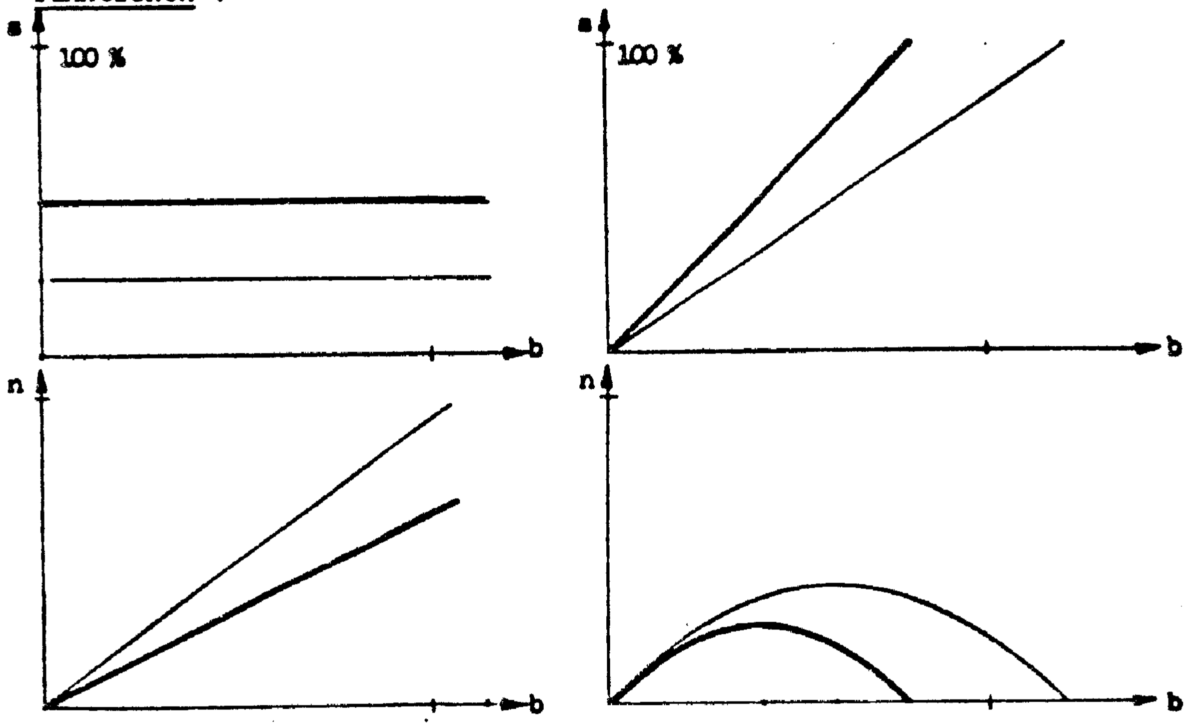
Wie das nächste Beispiel zeigt, kann man jedoch auch mit viel weniger mathematischem Vorwissen (und etwas mehr heuristischem Denken) Kurvendiskussionen auf pragmatischer Ebene betreiben:

<u>Beispiel 4:</u> "Steuerprogression"

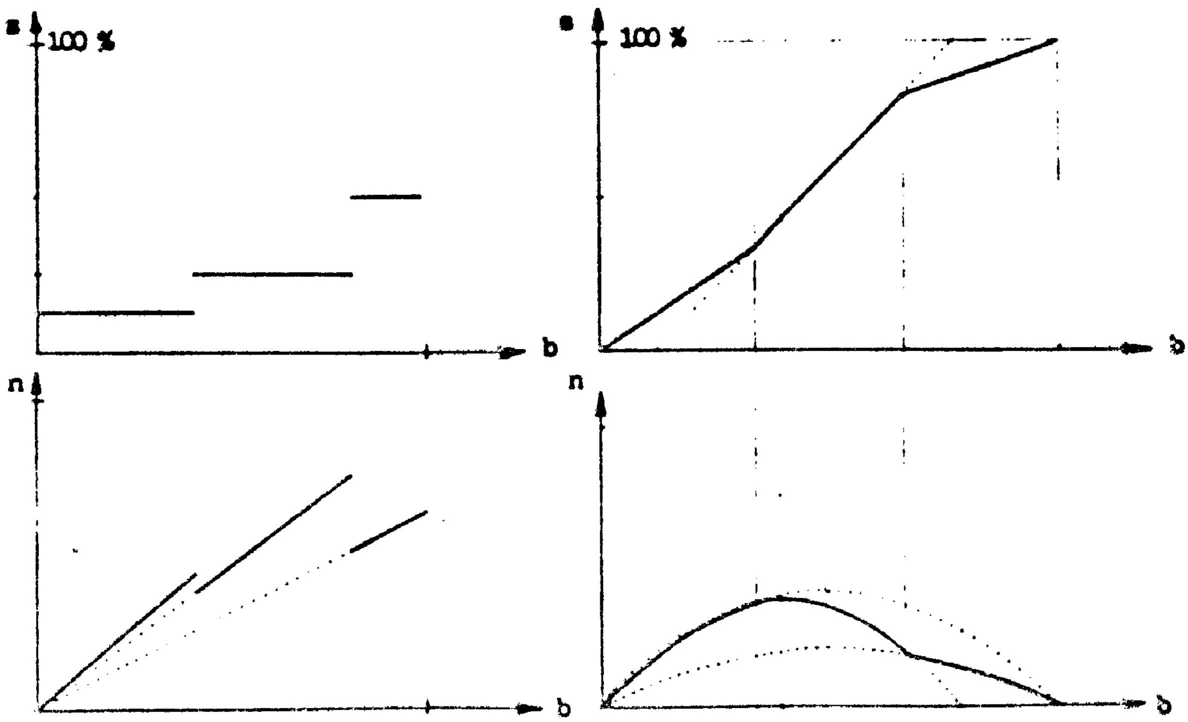
Zu diskutieren ist, wie sich verschiedene Steuersysteme auf das Nettoeinkommen auswirken (könnten). Das Steuersystem soll dabei jeweils als (stückweise) lineare Funktion zwischen den Bruttoeinkommen und Steuersätzen modelliert werden.

Auf syntaktischer Ebene geht es zunächst darum, jeweils den Graphen der Funktion zwischen Brutto- und Nettoeinkommen (im wesentlichen global) herzuleiten und zu diskutieren. Besondere didaktische Bedeutung hat dabei die gleichzeitige Darstellung zweier Besteuerungsfunktionen d e s s e l b e n Typs in einer Figur. Dadurch zielt man frühzeitig auf ein Denken in

Kurven- S c h a r e n ab, und schafft sich so ein <u>Repertoire an Grundfunktionen</u> :



Dabei bedeutet s den Steuersatz, b den Brutto- und n den Nettolohn in irgendwelchen gleichen Einheiten. Die auftretenden Parabeln lassen sich übrigens mit rein elementaren Mitteln (also schon auf der 8.Schulstufe) konstruieren. Kompliziertere Besteuerungsfunktionen lassen sich aus den obigen m o d u l a r aufbauen:



Abgesehen von der Möglichkeit der punktweisen Ermittlung der Parabeln sind diese wiederum mit elementaren Kenntnissen über Kegelschnitte konstruierbar. Die (stückweise) linearen Funktionen machen wohl keine Probleme.

Im Hinblick auf unsere didaktischen Intentionen im Rahmen des Kapitels 'Kurvendiskussionen' erscheint zweierlei bemerkenswert. Erstens, daß auch Funktionen mit 'Ecken' und 'Sprungstellen' nicht unbedingt an den Haaren herbeigezogen werden müssen, sondern durchaus 'alltäglich' sind. Zweitens, daß die semantische und pragmatische Ebene hier besondere Bedeutung erlangen. Offensichtlich dienen die Überlegungen im mathematischen Modell vermittels Kurvendiskussion dazu, durch das Steuersystem bedingte (denkbare) gesellschaftliche Auswirkungen zu erkennen, festzustellen, welche Gruppe welches System favorisieren würde. Die modulare Zusammensetzung 'verschiedener' Grundfunktionen entspricht eben dem Aufsuchen eines möglichen (gesellschaftlich akzeptablen) Kompromisses.

FACHDIDAKTISCHE KONSEQUENZEN

Wie ich in den ersten beiden Abschnitten aufzuzeigen suchte, sind Funktionen etwas derart Fundamentales, daß ihre 'Entschlüsselung' sich nicht auf ein festumrissenes Lösungsschema aus der Differentialrechnung beschränken kann. Kurvendiskussion als das Entschlüsseln von Zusammenhängen baut auf einer ganzen Palette von Methoden auf. Daraus ergibt sich zweierlei:

a) Erstens haben sich diese Methoden - wie jede andere software - (didaktischen) Beurteilungskriterien zu stellen. Es sind dies z.B.

* Angemessenheit der Methode (bez. der Qualität der Kurve)
* Benutzerfreundlichkeit (Akzeptanz und Benutzerqualifikation)
* Exaktheit und Effektivität
* Aufwand (Effizienz, notwendige Geräte und Materialien)
* Transparenz der Methode (Verständlichkeit und Nachprüfbarkeit)
* Wirkungsbreite (Anpassungsfähigkeit)
* Automatisierbarkeit (Computerisierung)

und schließlich ganz besonders

* Tauglichkeit für die Schulwirklichkeit (Prüfbarkeit, Korrigierbarkeit)

b) Zweitens ergibt sich ganz natürlich eine gewisse oligarchische und hierarchische Strukturierung innerhalb dieser Methoden. Der Lehrer hat gemäß dem Spiralprinzip darauf Bedacht zu nehmen. Die folgende Tabelle soll dabei einerseits als Gerüst dienen, andererseits auf die m.E. bestehende Parallelität zu den Problemlöseniveaus und in gewissem Sinn auch zur Sprache hinweisen:

Objektebene — 'reale' Zusammenhänge

↕ Ratiomorphe Strukturen trennen Notwendigkeit und Zufall, Variabilität und Invarianz

Antwortebene — Erwerben eines 'Wortschatzes' an Grundfunktionen 'Denken in Funktionen' wird kommunizierbar und objektivierbar.

↕ (Formale Sprach-)Regeln gestatten die Kombination und Transformation von Funktionen

Aufgabenebene — 'Lesen und Schreiben' von Funktionen durch

Algorithmische Zerlegung komplexer Funktionen in elementare
z.B. Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen
z.B. Analyse durch Synthese bei $y=kx+d$

Ausführung vorgegebener Verkettungsoperationen
z.B. Verknüpfung linearer Funktionen
z.B. Affine Scherung eines Graphen

↕ Heurismen und Kreativität, sowie ein gewisser 'Stil' wirken hin auf die Innovation 'neuer' Funktionen

Problemebene — Umgang mit Funktionen auf höchster (Schul-)Ebene

Denken in Funktionsklassen(Kurvenscharen),Funktionalgleichungen

z.B. Exponentialfunktion bei gew. Wachstumsprozessen
z.B. Allgemeine Darstellung harmonischer Schwingungen
z.B. Kegelschnitte, Cassinische Linien,...

Nicht-algorithmische Zerlegung komplexer Funktionen in elementare und 'kreative' Verkettung geeigneter Moduln zu einer Kurve vorgegebener Gestalt.

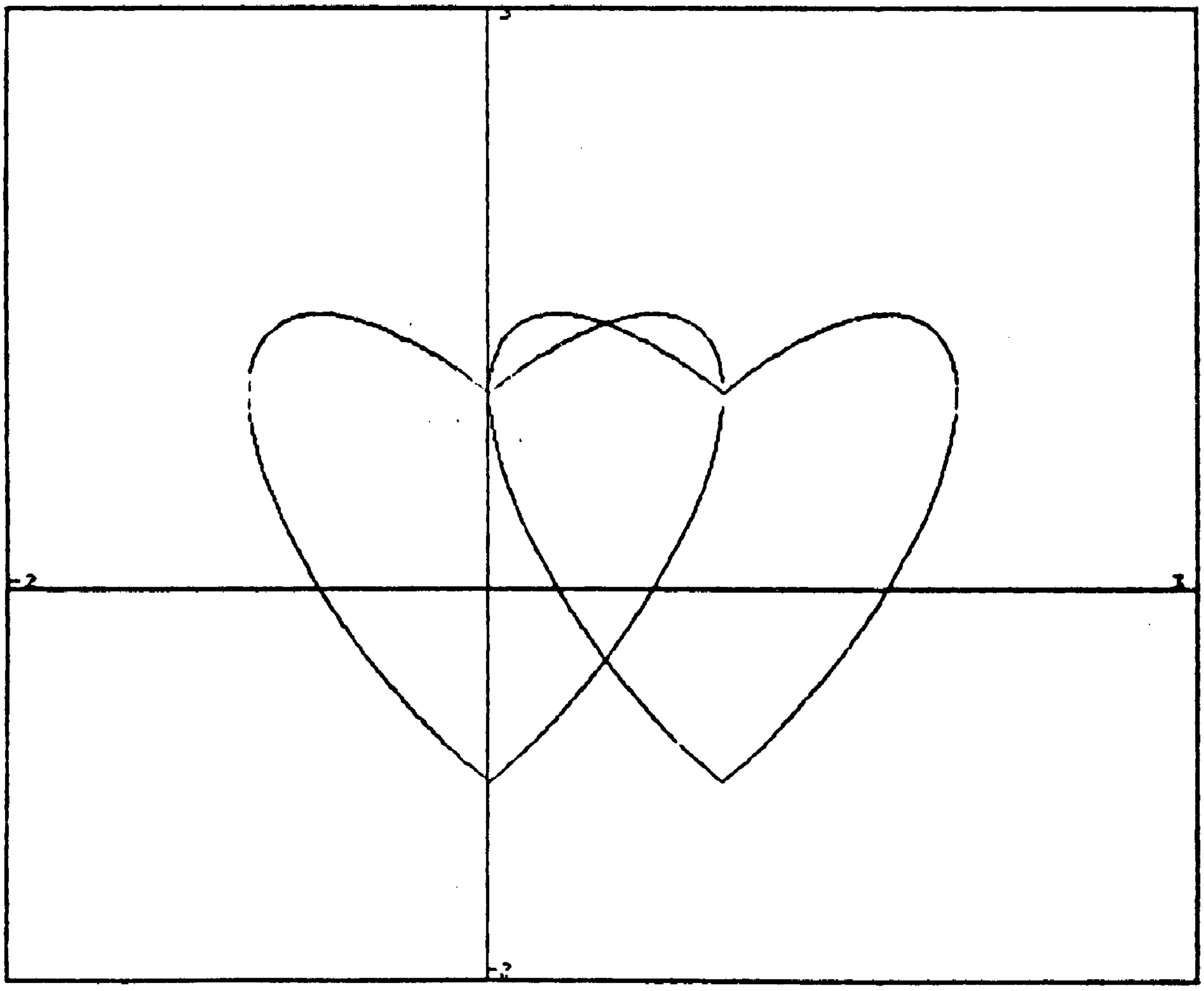
Letzteres soll abschließend an 2 Beispielen demonstriert werden:

<u>Beispiel 5:</u> "Verschlungene Herzen"

Zwei kongruente, ineinander verschlungene Herzen sind durch ein(ig)e geeignete Funktion(en) zu 'verschlüsseln' !

Ausgangspunkt wird der 'qualitative' Verlauf eines solchen 'Herzens' sein. Wie man aus der nachstehenden Figur 'erkennt', läßt sich die Herzkurve bei einer Scherung längs der y-Achse in (etwa) einen Kreis transformieren. Dies und die Existenz zweier Spitzen auf der Symmetrieachse legt die zunächst versuchsweise, schließlich aber erfolgreiche Überlagerung eines Kreises mit der Betragsfunktion nahe. Das zweite Herz ergibt sich durch eine geeignete Schiebung längs der x-Achse. Wegen der fehlenden Rechtseindeutigkeit nimmt man Zuflucht zur impliziten Darstellung

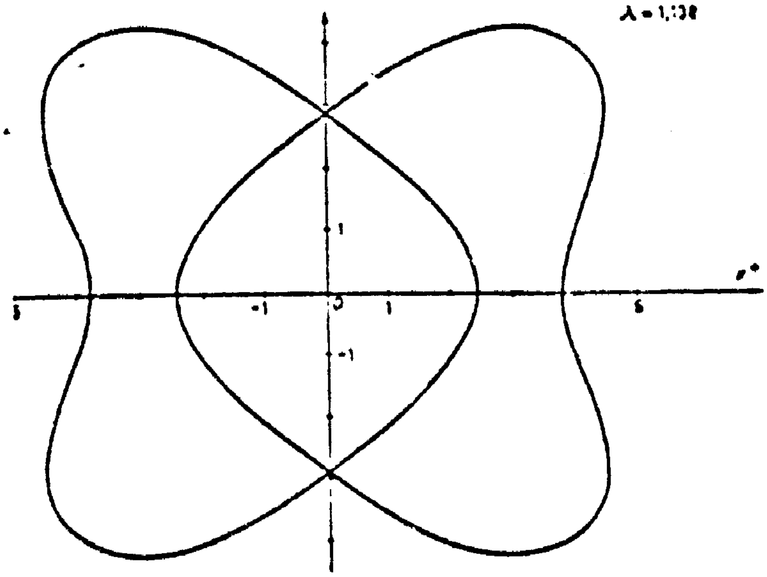
$$F(x,y) = (|x| \pm \sqrt{1 - x^2}\,).(|x-1| \pm \sqrt{1 - (x-1)^2}\,)$$



Ein anderer Weg wäre die Bestimmung von geeigneten Parameterwerten in Kurvenscharen, die zur Darstellung 'verschlungener Herzen' geeignet erscheinen. Das nachfolgende Exemplar einer 'Teufelskurve' zeigt für den Parameterwert $\lambda = 1,138$ ebenfalls ein der Angabe entsprechendes Bild:*)

$$F(x,y) = (x^2-16)(x^2-4) + \lambda.(y^2-16)(y^2-1) = 0$$

*) J. Laub : 'Elementare Kurvendiskussion'' / in 'Der Mathematikunterricht',Jg.16,Heft 5 /1970

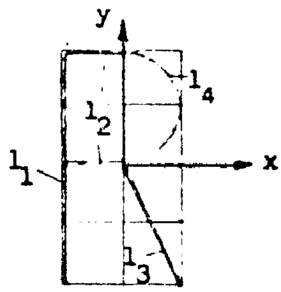


<u>Beispiel 6:</u> "Buchstabenverschlüsselung" *)

In einem rechteckigen Raster, bestehend aus acht Quadraten der Seitenlänge b sind die Großbuchstaben durch Strecken und/oder Kreisbögen zu verschlüsseln !

Zu Demonstrationszwecken sei der Buchstabe 'R' ausgewählt; gemäß der nachstehenden Figur besteht er aus den Streckenzügen l_1, l_2, l_3 und dem Halbkreis l_4. Die Schwierigkeit besteht offenbar vorallem darin, die Linien auf ihren Trägerkurven in der gewünschten Länge abzugrenzen. Der Trick zur Lösung dieses Problems besteht darin, mittels geeigneter Hilfsfunktionen mit vorgegebenen Definitionsbereichen die Trägerkurven zu überlagern und so den (gemeinsamen) Definitionsbereich einzuschränken.
Man erhält so:

l_1: $x+b+(4b^2-y^2)-\sqrt{4b^2-y^2}^{\,2} = 0$
l_2: $(y-2b).y+(-x^2-bx)-\sqrt{-x^2-bx}^{\,2} = 0$
l_3: $y+2x+(bx-x^2)-\sqrt{bx-x^2}^{\,2} = 0$
l_4: $\sqrt{x}^{\,4}+(y-b)^2-b^2 = 0$



Ausgestattet mit diesem Wissen ist es nunmehr ein leichtes dem Titel zu entnehmen, worum es in diesem Referat ging, nämlich um die

KURVENDISKUSSION - EINMAL ANDERS

*) vgl. Praxis der Mathematik 26.Jg., Heft 8 / 1984